主动观点和被动观点

Kean 2021-05-12

An active transformation is a transformation which actually changes the physical position (alibi, elsewhere) of a point, or rigid body, which can be defined in the absence of a coordinate system; whereas a passive transformation is merely a change in the coordinate system in which the object is described (alias, other name) (change of coordinate map, or change of basis).[1]

现有一个实验室坐标系$(\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})$，在这个坐标系下有一个向量

$$V = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

有一个算符（操作）g。

1 主动观点

1.1 定义

主动观点是说，**这个算符作用在向量上，坐标系不动**。

$$V' = g \circ V = g \circ (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = g \circ (x\boldsymbol{i}) + g \circ (y\boldsymbol{j}) + g \circ (z\boldsymbol{k})$$

假设这个g是绕$\boldsymbol{k}$轴（实验室坐标系）旋转角度θ，那么

$$\begin{aligned} g \circ (x\boldsymbol{i}) &= x\cos\theta\boldsymbol{i} + x\sin\theta\boldsymbol{j} \\ g \circ (y\boldsymbol{j}) &= -y\sin\theta\boldsymbol{i} + y\cos\theta\boldsymbol{j} \\ g \circ (z\boldsymbol{k}) &= z\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

得到

$$
\begin{aligned}
V' &= (x\cos\theta - y\sin\theta)\boldsymbol{i} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\
&= (\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

把向量变换写成这种形式：固定坐标系的基×矩阵×坐标。就是主动观点下的表示。

此时获得的是 g **在实验室坐标系下的主动表示！**

$$
g \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

1.2 主动观点的两种形式

注意到，向量有两个属性，一个是向量所在的基，另一个是向量在基下的坐标。这两个属性导致了主动表示具有两种写法。

上面的形式是将群元素作用在坐标上，对任意向量的坐标变换为

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{(\text{新矢，旧基})} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\text{旧矢，旧基})}
$$

你要是喜欢的话，也可以将群元素作用在坐标上的结果改写成

$$
\begin{aligned}
V' &= x(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}) + y(-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}) + z\boldsymbol{k} \\
&= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

这样相当于把群元素作用在基上，得到刚体坐标系的变换。

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

也就是说，已知变换前的向量（基和坐标），要求得变换后的向量有两种方法，一种是求坐标的变换得到新坐标乘上旧基，另一种是求刚体坐标系的变换得到新基乘上旧坐标。

1.3 多个主动操作同时进行

如果有

$$
\begin{aligned}
g\circ V = g\circ\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \\
f\circ V' = f\circ\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

那么可以得到

$$
\begin{aligned}
V'' = f\circ(g\circ V) = f\circ\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{i}'' & \boldsymbol{j}'' & \boldsymbol{k}''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

可以看出多个连续操作得到的固有坐标系是满足一个过渡矩阵的关系。

并且得到坐标变换为

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

这顺序似乎跟原有的理解不太相同。这是因为 f 和 g 是在不同基下的表示，如果 f 有

$$f \circ V' = f \circ \left[(\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right] = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

那么可以得到

$$\begin{aligned} V'' = f \circ (g \circ V) &= f \circ \left[(\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \\ &= (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

坐标变换为

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

这就符合通常理解了。做来做去都是主动操作，但是如果表示都在同一个基取的，就直接按相同的顺序相乘就行，但如果表示是在依次操作后的基去取的话，顺序就是反的。

2 被动观点

被动观点是说，**这个算符作用在坐标系上，向量不动**。

$$g\circ(\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{i}'\quad\boldsymbol{j}'\quad\boldsymbol{k}')=(\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k})G$$

其中，$(\boldsymbol{i}'\quad\boldsymbol{j}'\quad\boldsymbol{k}')$是新的基，G 就是群元$g$的被动表示，需要利用主动表示来求出。

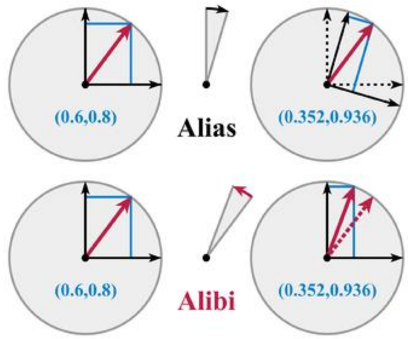

图 1 主动变换（Alibi）和被动变换（Alias）

被动变换需要满足，不动的矢量 V 在动坐标系下的坐标跟动的矢量在不动的坐标系下的坐标一致，如图 1 所示。也就是说，

$$V_p=(\boldsymbol{i}'\quad\boldsymbol{j}'\quad\boldsymbol{k}')\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=(\boldsymbol{i}'\quad\boldsymbol{j}'\quad\boldsymbol{k}')\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=V_a=(\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

因此，

$$(\boldsymbol{i}'\quad\boldsymbol{j}'\quad\boldsymbol{k}')=(\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}\quad\boldsymbol{k})\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

其中，矩阵

$$G=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

称为被动表示，跟主动表示是互逆的关系。同样，考虑已知变换前的向量（基和坐标），要求得变换后的向量，因为向量是不动的，所以有

$$V = (\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

并且满足，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{(\text{新矢，新基})} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\text{旧矢，旧基})}$$

从坐标变换看的话，主动观点和被动观点具有相同的矩阵（上式相当于被动观点的定义）。但是基的变换是互逆的，因为主动是转动刚体，被动是转动坐标系。

如何判断所求的表示是主动观点还是被动观点？

若操作直接作用到向量上，不管写成坐标变换还是基的变换都是主动表示。

3　不同基下的主动表示

如果我们已知g在坐标系$(\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')$的主动表示，即对于一个向量$U = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$，满足

$$U' = gU = (\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

怎么反推出g在坐标系$(\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})$的主动表示呢？

也就是说，要找到矩阵A满足

$$U' = gU = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{1}$$

注意到U在两个不同的基可以分别表示为

$$\begin{aligned} U &= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= (\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

考虑$(\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})$到$(\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')$过渡矩阵$Q$，

$$(\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}') = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})Q$$

得到坐标变换关系

$$(\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

也就是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

代入(1)式得

$$U' = gU = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) Q \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

因此，

$$A = Q \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

那问题是，怎么求出$(\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k})$到$(\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')$的过渡矩阵$Q$呢？从图像来分析。

可以定义一个过渡操作p，这个操作将实验室坐标系的向量变为

$$\begin{aligned} V' &= pV = p(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}') \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

也就是说找到一个过渡操作恰好把刚体的固有坐标系跟基$(\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}')$重合，这个过渡操作对应的矩阵就是过渡矩阵。

$$(\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}') = (\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}) P$$

4 欧拉角

描述刚体的取向可以用欧拉角(α,β,γ)，**任意旋转操作可以用三个连续旋转构成**。即

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1P_2P_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

可以看成基的变化

$$(X \quad Y \quad Z) = (x \quad y \quad z)P_1P_2P_3$$

如图 2 所示。

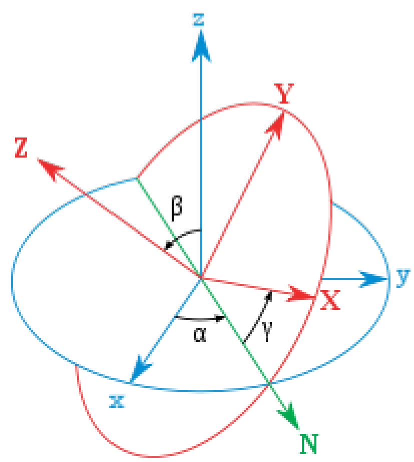

图 2 欧拉角示意图

其中， $P_1 = C_z(\alpha)$ 为绕着 z 轴转 α 角的矩阵， $P_2 = C_{y'}(\beta)$ 为绕着 y' 轴转 β 角的矩阵， $P_3 = C_Z(\gamma)$ 为绕 Z 轴转动 γ 的矩阵，通过连续的过渡操作将 $(x \quad y \quad z)$ 过渡到 $(X \quad Y \quad Z)$。

$$(X \quad Y \quad Z) = (x \quad y \quad z)C_z(\alpha)C_{y'}(\beta)C_Z(\gamma)$$

这种方法依然是主动观点。如果利用过渡矩阵写出 $P_2 = C_{y'}(\beta)$、$P_3 = C_Z(\gamma)$ 在基 $(x \quad y \quad z)$ 下的表示，得到

$$\begin{aligned} C_y(\beta) &= C_z(\alpha)C_{y'}(\beta)C_z(\alpha)^{-1} \\ C_z(\gamma) &= C_z(\alpha)C_{y'}(\beta)C_Z(\gamma)C_{y'}(\beta)^{-1}C_z(\alpha)^{-1} \end{aligned}$$

代入可得$C_z(\alpha)C_{y'}(\beta)C_Z(\gamma)=C_z(\gamma)C_y(\beta)C_z(\alpha)$，可以看出，操作顺序正好相反了。跟前面分析一致。

5　一般定轴转动

绕 n 轴转动的操作$C_{\boldsymbol{n}}(\psi)$可以由过渡矩阵得到其在$(\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k})$坐标系的表示。

设 n 轴对应的坐标系为$(\boldsymbol{i}''\quad \boldsymbol{j}''\quad \boldsymbol{n})$，那么有

$$(\boldsymbol{i}''\quad \boldsymbol{j}''\quad \boldsymbol{n})=(\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k})C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)C_{j'}(\theta)$$

因为转动无所谓 x，y 轴怎么取，所以过渡矩阵只需要 2 个，接下来将过渡矩阵变换到$(\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k})$坐标系。

$$C_j(\theta)=C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)C_{j'}(\theta)C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)^{-1}$$

因此，

$$C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)C_{j'}(\theta)=C_j(\theta)C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)$$

知道了过渡矩阵，就可以得到$C_{\boldsymbol{n}}(\psi)$在$(\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k})$坐标系的表示。

$$\begin{aligned}C_{\boldsymbol{n}}(\psi)&=C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)C_{j'}(\theta)\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}C_{j'}(\theta)^{-1}C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

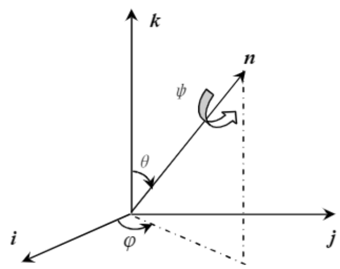

图 3 定轴转动

参考

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Active_and_passive_transformation

[2] 纯属瞎编，勿信，如果有建议或意见请联系。