第一章作业

1. 书的题

1.1 求 6 阶循环群的所有不变子群，以及其对应的商群。

显然，循环群的所有子群都是循环群。因此，采用寻找循环子群的方法可以找到以下两个循环子群，这两个循环子群就是**所有**的子群。并且，由于循环群的元素满足对易关系，这两个子群也是不变的。

$$H_1 = \{e \ a^2 \ a^4\}$$
$$H_2 = \{e \ a^3\}$$

对应的商群为

$$\{H_1 \ aH_1\}$$
$$\{H_2 \ aH_2 \ a^2H_2\}$$

1.6 设群 G 只有一个阶为 2 的元素 h，证明：对$\forall g \in G$，有$gh = hg$。

由于不同类的元素个数不相同，因此 h 自成一类，由类的定义可知 h 与 G 中所有元素对易。

1.7 设$G = G_1 \otimes G_2$，证明：商群G/G_1跟G_2同构。

可用$G_2 = \{e' \ g_1' \ g_2' \ ...\}$去构造$G_1$的陪集串$\{G_1 \ g_1'G_1 \ g_2'G_1 \ ...\}$，这个陪集串包含了 G 中所有元素，因而它就是商群G/G_1。

并且，$g_1'G_1$、$g_2'G_1$是不同的陪集，否则 G 中元素的表示将不唯一。

因而，可以建立$g' \leftrightarrow g'G_1$的映射关系ϕ，是**一一对应**的。

此外，需要验证**乘法关系**：

$$\phi(g_1'g_2') = \phi(g_3') = g_3'G_1 = g_1'g_2'G_1 = g_1'G_1g_2'G_1 = \phi(g_1')\phi(g_2')$$

上式第四个等号用到了G_1、G_2元素的对易关系。

2. 试找出 4 阶群的所有独立的乘法表。（要有分析过程！不能直接给出）

首先可以确定，对角线要不都是单位元，要不只有 2 个单位元。

先写出对角线全部都是单位元的形式。这种情况下只有一种填法，游戏结束。

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

接下来看看对角线有 2 个单位元的填法。

其中 1 个单位元已经被占了，另一个要分别填在 a、b、c 的对角元处，发现都分别只能有一种填法。

可以发现这三种填法如果适当交换位置并改变符号，可以得到完全相同的乘法表，因此这三种乘法表是一致的。

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

3. 一个 8 阶群 G 的乘法表如下

	e	a	a'	a''	b	b'	b''	b'''
e	e	a	a'	a''	b	b'	b''	b'''
a	a	a'	a''	e	b'	b''	b'''	b
a'	a'	a''	e	a	b''	b'''	b	b'
a''	a''	e	a	a'	b'''	b	b'	b''
b	b	b'''	b''	b'	a'	a	e	a''
b'	b'	b	b'''	b''	a''	a'	a	e
b''	b''	b'	b	b'''	e	a''	a'	a
b'''	b'''	b''	b'	b	a	e	a''	a'

（1）以 a、b 为生成元，写出其他元素的表达式；

$$\{e\ a\ a'\ a''\ b\ b'\ b''\ b'''\} = \{e\ a\ a^2\ a^3\ b\ ab\ b^3\ ba\}$$

（2）写出 a、b 满足的定义关系；

$$\begin{cases} a^4 = e \\ b^4 = e \\ a^2b^2 = e \\ abab^3 = e \end{cases}$$

（3）写出 G 的所有类；

按照找类的一般方法，可以写出所有类为

$$\{e\}、\{a\ a''\}、\{a'\}、\{b\ b''\}、\{b'\ b'''\}$$

（4）写出 G 的所有不变子群；

首先作为 8 阶群的子群，阶只能是 2 或是 4。

其次，不变子群应包含所有的类，那么可以先通过类构造出含 2 个或 4 个元素的集合，然后再验证这些集合是否满足子群的定义。

最终得到阶为 2 的不变子群为$\{e\ a'\}$，阶为 4 的不变子群为$\{e\ a\ a'\ a''\}$、$\{e\ a'\ b'\ b'''\}$、$\{e\ a'\ b\ b'\}$

（5）写出 G 的商群的非平庸直积结构，如果有的话。

8 阶群 G 应该分为 2 阶和 4 阶不变子群的乘积，但是 G 的不变子群中都包含了e和a'，而满足直积结构的不变子群只有一个共同的元素e，所以没有。