第三章作业

1　韩其智、孙洪洲《群论》 p325 4.3， 4.4， 4.5， 4.7， 4.9

4.3 求出二维转动群的所有不等价不可约表示和双值表示.

Answer:

因为 SO(2)是一个 Abel 群，由舒尔引理可知 SO(2)的所有不可约表示都是一维的，且满足

$$a(\theta_1+\theta_2)=a(\theta_1)a(\theta_2)$$

上式对θ_1求导，并令$\theta_1=0$。并由$\left.\frac{da(\theta_1+\theta_2)}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=0}=\frac{da(\theta_2)}{d\theta_2}$，得到

$$a(\theta)=Ce^{A\theta}$$

其中，$A=\left.\frac{da(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}$。由$a(0)=1$，得到

$$a(\theta)=e^{A\theta}$$

为了满足幺正性，令$A=im$，得到

$$a(\theta)=e^{im\theta}$$

（1）实空间旋转

　　对于实空间三维旋转，周期性边界条件为$a(\theta)=a(\theta+2\pi)$，有$m=0,\pm1,\pm2,\ldots$。

一维表示显然不可约。对任意的表示$e^{im\theta}$和任意非 0 数 a，有$ae^{im\theta}a^{-1}=e^{im\theta}$。

因此对所有的 m，对应的表示$e^{im\theta}$都是不等价的。

由于对所有的 m，$e^{im\theta}$构成一组完备的基，所以应该给出了所有的不等价不可约表示。

前面用到了周期性边界条件$a(\theta)=a(\theta+2\pi)$，可以得到$a(2\pi)=a(0)=1$。

（2）自旋内乘空间的旋转

对应的周期性边界条件应该是$a(\theta)=a(\theta+4\pi)$。可以得到$m=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm\frac{3}{2},\cdots$，对于 m 为整数，得到的表示跟前面相同，且$a(2\pi)=1$。

对于 m 为半奇数，$a(2\pi)=-1$，这个操作记为$\bar{E}$，将这个操作与 SO(2)转动群的群元相乘得到集合$\bar{E}\cdot SO(2)$。这个集合和 SO(2)合并得到大集合$\{\bar{E}\cdot SO(2),SO(2)\}$，这个大集合在 SO(2)的乘法下构成一个群，称为双群$SO^D(2)$，注意此时 SO(2)并不是$SO^D(2)$的子群了。双群的表示就是 SO(2)的双值表示。

即对于表示的指标$m=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm\frac{3}{2},\cdots$，

$$a(\theta)=e^{im\theta}$$

若$\theta\in[0,2\pi)$，则$a(\theta)\in SO(2)$。若$\theta\in[2\pi,4\pi)$，则$a(\theta)\in\bar{E}\cdot SO(2)$。满足保乘关系

$$a(\theta_1+\theta_2)=a(\theta_1)a(\theta_2)$$

双值表示也可以理解为：$SO(2)$的群元$a(\theta)$对应着双群中$\bar{E}\cdot SO(2),SO(2)$两个群元的表示，

$$a(\theta)=\begin{cases}e^{im\theta}\\-e^{im\theta}\end{cases}$$

其中，$\theta\in[0,2\pi]$。

4.4 推导$D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$满足

$$i\frac{\partial}{\partial\alpha}D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)=m'D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$$

$$i\frac{\partial}{\partial\gamma}D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)=mD^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}-2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)\right]D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)=j(j+1)D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$$

Answer:

SO(3)群的表示为

$$D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)=e^{-im'\alpha}d^j_{m'm}(\beta)e^{-im\gamma}$$

前两个式子容易看出来，主要看第三个式子。可以证明（见附录 1）

$$J^2R(\alpha\beta\gamma)=\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}-2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)\right]R(\alpha\beta\gamma) \qquad (1)$$

那么利用$R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle=\sum_{m'=-j}^{j}D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle$ 可以得到

$$\begin{aligned}J^2R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle&=\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}-2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)\right]R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle\\&=\sum_{m'=-j}^{j}D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)J^2|jm'\rangle=\sum_{m'=-j}^{j}D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)j(j+1)|jm'\rangle\end{aligned}$$

进一步可以得到

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}-2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)\right]D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)=j(j+1)D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$$

4.5 设$(2j+1)$个向量$|jm\rangle$，$m=-j,-j+1,...,j-1,j$空间按D_j变换，即

$$R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^{j} D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle$$

证明，$|jm\rangle$ 必是J^2，J_z的本征矢，对应本征值为$j(j+1)$，m

Answer:

解法 1

由上题的结果，

$$J^2 R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = R(\alpha\beta\gamma)J^2|jm\rangle = j(j+1)\sum_{m'=-j}^{j} D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle = R(\alpha\beta\gamma)j(j+1)|jm\rangle$$

由于算符$R(\alpha\beta\gamma)$取值任意，因此$J^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle$，同理

$$R(\alpha\beta\gamma)J_z|jm\rangle = i\frac{\partial}{\partial\gamma}R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^{j} mD^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle = R(\alpha\beta\gamma)m|jm\rangle$$

因此，$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle$。

$\square$

解法 2（复杂）

由

$$R(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_z}e^{-i\beta J_y}e^{-i\gamma J_z}$$

$$D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = e^{-im'\alpha}d^j_{m'm}(\beta)e^{-im\gamma}$$

考虑在单位元附近做无穷小的展开，

$$
\begin{aligned}
R(00\gamma)|jm\rangle = e^{-i\gamma J_z}|jm\rangle &\approx (1-i\gamma J_z)|jm\rangle \\
&= \sum_{m'=-j}^{j} D^j_{m'm}(00\gamma)|jm'\rangle \\
&= \sum_{m'=-j}^{j} \delta_{m'm} e^{-im\gamma}|jm'\rangle \\
&= e^{-im\gamma}|jm\rangle \approx (1-im\gamma)|jm\rangle
\end{aligned}
$$

由上式得

$$
J_z|jm\rangle = m|jm\rangle
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
R(0\beta 0)|jm\rangle = e^{-i\beta J_y}|jm\rangle &\approx (1-i\beta J_y)|jm\rangle \\
&= \sum_{m'=-j}^{j} D^j_{m'm}(0\beta 0)|jm'\rangle \\
&= \sum_{m'=-j}^{j} \left[\delta_{m'm} - \frac{\beta}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,\delta_{m',m+1} + \frac{\beta}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\delta_{m',m-1}\right]|jm'\rangle \\
&= |jm\rangle - \frac{\beta}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,|j,m+1\rangle + \frac{\beta}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\delta_{m',m-1}|j,m-1\rangle
\end{aligned}
$$

因此，

$$
J_y|j,m\rangle = -\frac{i}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,|j,m+1\rangle + \frac{i}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle
$$

由对易关系，$J_x = -i[J_y, J_z]$，可以推出

$$
J_x|j,m\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,|j,m+1\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle
$$

引入$J_\pm = J_x \pm iJ_y$，得

$$
\begin{aligned}
J_+|jm\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,|jm+1\rangle \\
J_-|jm\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|jm-1\rangle
\end{aligned}
$$

由$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_z^2 + J_z + J_+ J_-$得到

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle \qquad \square$$

4.7 设J^2, J_z和 B 是一组力学量完全集，$|jmb\rangle$是共同本征矢，

$$\begin{aligned}
J^2|jmb\rangle &= j(j+1)|jmb\rangle \\
J_z|jmb\rangle &= m|jmb\rangle \\
B|jmb\rangle &= b|jmb\rangle
\end{aligned}$$

证明，算符

$$\begin{aligned}
&V_m^j = \sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle\, |j_1, m_1, b_1\rangle\langle j_2, m_2, b_2| \\
&m = -j, -j+1, ..., j-1, j
\end{aligned}$$

是 SO(3)群的 **j 秩**不可约张量。

Answer:

若算符V_m^j如果满足

$$\begin{aligned}
[J_z, V_m^j] &= m V_m^j \\
[J_\pm, V_m^j] &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, V_{m\pm 1}^j
\end{aligned}$$

那么这个算符就是 **j 秩**不可约张量算符。设

$$a(m, m_1, m_2) = (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle$$

其中，非零的 CG 系数需要满足$m = m_1 - m_2$。

（1）先证明第一个条件。

$$
\begin{aligned}
[J_z, V_m^j] &= \left[J_z, \sum_{m_1,m_2} a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| \right] \\
&= (J_{z1}+J_{z2})\sum_{m_1,m_2} a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| - \sum_{m_1,m_2} a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2|(J_{z1}+J_{z2}) \\
&= \sum_{m_1,m_2} m_1 a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| - \sum_{m_1,m_2} m_2 a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| \\
&= \sum_{m_1,m_2} (m_1-m_2) a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| \\
&= m\sum_{m_1,m_2} a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2|
\end{aligned}
$$

最后一个等号之所以能把m_1-m_2从求和号中提出来由 CG 系数的非零条件。

（2）接下来证明第二个条件。

先将对易关系展开为

$$
\begin{aligned}
[J_\pm, V_m^j] &= \left[J_\pm, \sum_{m_1,m_2} a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| \right] \\
&= (J_{1\pm}+J_{2\pm})\sum_{m_1,m_2} a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| - \sum_{m_1,m_2} a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2|(J_{1\pm}+J_{2\pm}) \\
&= \sum_{m_1,m_2} \sqrt{(j_1\mp m_1)(j_1\pm m_1+1)}\, a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1\pm 1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| \\
&\quad - \sum_{m_1,m_2} \sqrt{(j_2\pm m_2)(j_2\mp m_2+1)}\, a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2\mp 1,b_2|
\end{aligned}
$$

要证明$[J_\pm, V_m^j]=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,V_{m\pm1}^j$，即证明

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,V_{m\pm1}^j = &\sum_{m_1,m_2} \sqrt{(j_1\mp m_1)(j_1\pm m_1+1)}\, a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1\pm 1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2| \\
&- \sum_{m_1,m_2} \sqrt{(j_2\pm m_2)(j_2\mp m_2+1)}\, a(m,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2\mp 1,b_2|
\end{aligned}
$$

要证明两个算符相，可通过证明这两个算符在任意态下都相等。右式的平均值为

$$
\begin{aligned}
\langle j_1,m_1',b_1|[J_\pm, V_m^j]|j_2,m_2',b_2\rangle = &\sqrt{(j_1\pm m_1')(j_1\mp m_1'+1)}\, a(m,m_1'\mp 1,m_2') \\
&- \sqrt{(j_2\mp m_2')(j_2\pm m_2'+1)}\, a(m,m_1',m_2'\pm 1)
\end{aligned}
$$

左式的平均值为

$$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\langle j_1,m_1',b_1|V^j_{m\pm1}|j_2,m_2',b_2\rangle=\langle j_1,m_1',b_1|\sum_{m_1,m_2}a(m\pm1,m_1,m_2)|j_1,m_1,b_1\rangle\langle j_2,m_2,b_2||j_2,m_2',b_2\rangle$$
$$=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,a(m\pm1,m_1',m_2')$$

最终归结为证明 CG 系数满足关系

$$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,a(m\pm1,m_1',m_2')=\sqrt{(j_1\pm m_1')(j_1\mp m_1'+1)}\,a(m,m_1'\mp1,m_2')$$
$$-\sqrt{(j_2\mp m_2')(j_2\pm m_2'+1)}\,a(m,m_1',m_2'\pm1)$$

按课件给出的结果，应该不难证明上式是正确的。。。

因此，V^j_m是 SO(3)的 j 秩不可约张量算符。

4.9　设$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$是自旋为 1/2 的粒子，$S_z$为 1/2 和-1/2 的本征矢，$Y_{lm}$是轨道角动量本征态。写出总角动量 j，投影为 m，轨道角动量 l=j+1/2 的态$\Psi^{jm}_{l=j+\frac{1}{2}}$。试问，当空间绕 x 轴转$\pi$时，$\Psi^{jm}_{l=j+\frac{1}{2}}$如何改变？

Answer: 容易给出

$$\Psi^{jm}_{l=j+\frac{1}{2}}=|jm\rangle=|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}|jm\rangle$$
$$+|\frac{1}{2},\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}|jm\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}Y_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}Y_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}$$
$$=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

接下来求出绕 x 轴转动 π 对应的算符，将其作用到$\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm}$上即可得到$\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm}$。

绕 x 轴转动 π 对应的旋转矩阵为

$$R_x(\pi)=R\left(\theta=\frac{\pi}{2},\varphi=0,\psi=\pi\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

对应的欧拉角满足为$\beta=\pi$，$\gamma-\alpha=\pi$。

取$\alpha=0$（随便取一个），得到变换算符为$R=e^{-i\pi L_y}e^{-i\pi L_z}$。

然后将其作用到态矢量上，获得

$$\begin{aligned}R\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm}&=e^{-i\pi L_y}e^{-i\pi L_z}\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm}\\&=\sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-i\pi L_y}e^{-i\pi L_z}Y_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\pi L_y}e^{-i\pi L_z}Y_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\\&=e^{-i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-i\pi L_y}Y_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}-e^{-i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\pi L_y}Y_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\\&=e^{-i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-i\pi L_y}Y_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}-e^{-i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\pi L_y}Y_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

需要分别求出

$$\begin{aligned}e^{-i\pi L_y}Y_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}&=e^{-i\pi L_y}|j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\rangle=\sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}|j+\frac{1}{2},m'\rangle\langle j+\frac{1}{2},m'|e^{-i\pi L_y}|j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\rangle\\&=\sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}|j+\frac{1}{2},m'\rangle d_{m',m+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(\pi)=\sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}|j+\frac{1}{2},m'\rangle(-1)^{j-m}\delta_{m',-m-\frac{1}{2}}\\&=(-1)^{j-m}|j+\frac{1}{2},-m-\frac{1}{2}\rangle\end{aligned}$$

$$e^{-i\pi L_y}Y_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}=e^{-i\pi L_y}|j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}\rangle=\sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}|j+\frac{1}{2},m'\rangle\langle j+\frac{1}{2},m'|e^{-i\pi L_y}|j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}\rangle$$

$$=\sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}|j+\frac{1}{2},m'\rangle d^{j+\frac{1}{2}}_{m',m-\frac{1}{2}}(\pi)=\sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}|j+\frac{1}{2},m'\rangle\,(-1)^{j-m+1}\delta_{m',-m+\frac{1}{2}}$$

$$=(-1)^{j-m+1}|j+\frac{1}{2},-m+\frac{1}{2}\rangle$$

上式利用了$d^{j}_{m'm}(\pi)=(-1)^{j-m}\delta_{m',-m}$。

最终得到

$$R\Psi^{jm}_{l=j+\frac{1}{2}}=e^{-i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(-1)^{j-m}Y_{j+\frac{1}{2},-m-\frac{1}{2}}$$
$$-e^{-i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(-1)^{j-m+1}Y_{j+\frac{1}{2},-m+\frac{1}{2}}$$
$$=\begin{pmatrix}-e^{-i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}(-1)^{j-m+1}\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},-m+\frac{1}{2}}\\ e^{-i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}(-1)^{j-m}\sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},-m-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

2. SU(2)群参数是(a,b)，SO(3)群参数是方位角(θ,φ,ψ)或 Euler 角(α,β,γ)。

已知(a,b)与(α,β,γ)之间有 Cayley-Klein 关系，试给出(a,b)与(θ,φ,ψ)的关系，以及(θ,φ,ψ)和(α,β,γ)的关系。尽可能化简表达式，不出现“反三角函数”。

Answer:

（1）先求(a,b)与(θ,φ,ψ)的关系。

若用方位角(θ,φ,ψ)来描述 SO(3)群元素，有

$$C_{\boldsymbol{n}}(\psi)=C_{\boldsymbol{k}}(\varphi)C_{\boldsymbol{j}}(\theta)C_{\boldsymbol{k}}(\psi)C_{\boldsymbol{j}}^{-1}(\theta)C_{\boldsymbol{k}}^{-1}(\varphi)$$

由 SO(3)和 SU(2)的同态关系

$$C_k(\varphi) \to u_1 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}, \quad C_k^{-1}(\varphi) \to u_1^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}$$

$$C_j(\theta) \to u_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad C_j^{-1}(\theta) \to u_2^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_k(\psi) \to u_3 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\psi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\psi} \end{pmatrix}$$

进一步由保乘关系得到，

$$\begin{aligned} C_n(\psi) \to u(\theta,\varphi,\psi) &= u_1 u_2 u_3 u_2^{-1} u_1^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\psi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{2} + e^{\frac{-i\psi}{2}}\cos^2\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{i\varphi} & e^{-\frac{i\psi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{2} + e^{\frac{i\psi}{2}}\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即

$$a = e^{\frac{i\psi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{2} + e^{\frac{-i\psi}{2}}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$b = -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

（2）接下来求(θ,φ,ψ)和(α,β,γ)的关系。

由

$$a = \cos\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}$$

$$b = -\sin\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}$$

得到

$$\cos\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} = e^{\frac{i\psi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{2} + e^{\frac{-i\psi}{2}}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$-\sin\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} = -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

3. 利用公式

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \ldots$$

证明

$$u(\boldsymbol{n},\psi)\sigma_i u(\boldsymbol{n},\psi)^{-1} = \sum_{j=1}^{3} R_{ji}(\boldsymbol{n},\psi)\sigma_j$$

其中，$u(\boldsymbol{n},\psi) = e^{-i\frac{1}{2}\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \in SU(2)$, $R(\boldsymbol{n},\psi) = e^{-i\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}} \in SU(3)$

Answer:

我们知道，用 SU(2)的群元素对以泡利矩阵为基的矢量 h 做共轭变换可以诱导出一个SU(3)群元素。

为方便讨论，规定$\sigma_{x,y,z} = \sigma_{1,2,3}$，由对易关系

$$[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},\sigma_1] = 2i\sigma_2 n_z - 2i\sigma_3 n_y = 2i(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ n_z \\ -n_y \end{pmatrix} = 2\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})_{i1}$$

其中

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}=n_xJ_x+n_yJ_y+n_zJ_z=i\begin{pmatrix}0 & -n_z & n_y\\ n_z & 0 & -n_x\\ -n_y & n_x & 0\end{pmatrix}$$

进一步得

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},\sigma_1]]=[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},2i\sigma_2n_z-2i\sigma_3n_y]&=-4n_xn_z\sigma_3+4n_zn_z\sigma_1-4n_xn_y\sigma_2+4n_yn_y\sigma_1\\&=4(\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3)\begin{pmatrix}n_yn_y+n_zn_z\\ -n_xn_y\\ -n_xn_z\end{pmatrix}\\&=4\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})^2_{i1}\end{aligned}$$

其中，

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})^2=\begin{pmatrix}n_y^2+n_z^2 & -n_xn_y & -n_xn_z\\ -n_xn_y & n_x^2+n_z^2 & -n_yn_z\\ -n_xn_z & -n_yn_z & n_x^2+n_y^2\end{pmatrix}$$

依次类推，可得

$$\begin{aligned}e^{-i\frac{1}{2}\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\sigma_1e^{i\frac{1}{2}\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}&=\sigma_1-\frac{i}{2}\psi[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},\sigma_1]+\frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\psi\right)^2[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},\sigma_1]]+\ldots\\&=\sigma_1-i\psi\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})_{i1}+\frac{1}{2!}(-i\psi)^2\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})^2_{i1}+\ldots\\&=\sigma_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i\psi)^n}{n!}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})^n_{i1}\\&=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\psi)^n}{n!}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})^n_{i1}\\&=\sum_{i=1}^{3}\sigma_ie^{-i\psi(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})_{i1}}\end{aligned}$$

$\square$

4. 求电偶极跃迁的矩阵元

$$\langle j_1m_1|e\boldsymbol{r}|j_2m_2\rangle$$

Answer:

$$\langle j_1 m_1 | e\boldsymbol{r} | j_2 m_2 \rangle = \langle j_1 m_1 | x | j_2 m_2 \rangle e\boldsymbol{i} + \langle j_1 m_1 | y | j_2 m_2 \rangle e\boldsymbol{j} + \langle j_1 m_1 | z | j_2 m_2 \rangle e\boldsymbol{k}$$

令

$$\begin{aligned} x_0 &= z \\ x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy) \\ x_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy) \end{aligned}$$

反解得到

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_{-1}) \\ y &= \frac{i\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_{-1}) \\ z &= x_0 \end{aligned}$$

可以证明

$$\begin{aligned} [J_z, x_q] &= q x_q \\ [J_+, x_q] &= \sqrt{(1-q)(2+q)}\, x_q \\ [J_-, x_q] &= \sqrt{(1+q)(2-q)}\, x_q \end{aligned}$$

其中，$q = 0, 1, -1$。因此x_q 是 SO(3)的 1 秩不可约张量算符，这使得我们可以用 Wigner-Eckart 定理。

因此，有

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 | e\boldsymbol{r} | j_2 m_2 \rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\langle j_1 m_1 | (x_1 - x_{-1}) | j_2 m_2 \rangle e\boldsymbol{i} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\langle j_1 m_1 | (x_1 + x_{-1}) | j_2 m_2 \rangle e\boldsymbol{j} + \langle j_1 m_1 | x_0 | j_2 m_2 \rangle e\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e(-\boldsymbol{i} + i\boldsymbol{j})\langle j_1 m_1 | x_1 | j_2 m_2 \rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} e(\boldsymbol{i} + i\boldsymbol{j})\langle j_1 m_1 | x_{-1} | j_2 m_2 \rangle + e\boldsymbol{k}\langle j_1 m_1 | x_0 | j_2 m_2 \rangle \end{aligned}$$

问题归结为求矩阵元$\langle j_1m_1|x_q|j_2m_2\rangle$，由 Wigner-Eckart 定理，得

$$\langle j_1m_1|x_q|j_2m_2\rangle=\langle j_1\|x^1\|j_2\rangle\langle j_1m_1|1qj_2m_2\rangle$$

由 CG 系数的定义，只有满足

$$\begin{aligned}j_1&=|j_2-1|,...,j_2+1\\x_1{:}m_2+1&=m_1\\x_{-1}{:}m_2-1&=m_1\\x_0{:}m_2&=m_1\end{aligned}$$

即跃迁选择定则$\Delta m=m_1-m_2=0,1,-1$。接下来计算$\langle j_1\|x^1\|j_2\rangle$。

（1）当$j_2\geqslant1$时，由

$$\langle j_1\|x^1\|j_2\rangle=\frac{\langle j_10|x_0|j_20\rangle}{\langle j_10|10j_20\rangle}$$

以及不为 0 的 CG 系数为，

$$\begin{aligned}\langle j_2+1,0|10j_20\rangle&=(j_2+1)\sqrt{\frac{1}{(2j_2+1)(j_2+1)}}\\\langle j_2-1,0|10j_20\rangle&=-j_2\sqrt{\frac{1}{j_2(2j_2+1)}}\end{aligned}$$

只要求$\langle j_10|x_0|j_20\rangle=\langle j_10|z|j_20\rangle$就可以了，具体考不考虑自旋再说吧。

（2）当$j_2=\dfrac{1}{2}$时，计算

$$\langle j_1\|x^1\|\frac{1}{2}\rangle=\frac{\langle j_1\frac{1}{2}|x_0|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle}{\langle j_1\frac{1}{2}|10\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle}$$

不为 0 的 CG 系数为

$$\langle \frac{3}{2}\frac{1}{2}|10\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}|10\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

只需要求 $\langle j_1\frac{1}{2}|x_0|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$。

（3） 当 $j_2 = 0$ 时，计算

$$\langle j_1\|x^1\|0\rangle = \frac{\langle 10|x_0|00\rangle}{\langle 10|1000\rangle}$$

不为 0 的 CG 系数为

$$\langle 10|1000\rangle = 1$$

只需要求 $\langle 10|x_0|00\rangle$。

附录

1 证明(1)式

利用

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha\beta\gamma) &= i\frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}e^{-i\gamma J_3} = J_3R(\alpha\beta\gamma) \\
i\frac{\partial}{\partial\beta}R(\alpha\beta\gamma) &= i\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}e^{-i\gamma J_3} = e^{-i\alpha J_3}J_2e^{i\alpha J_3}R(\alpha\beta\gamma) = (J_2\cos\alpha - J_1\sin\alpha)R(\alpha\beta\gamma) \\
i\frac{\partial}{\partial\gamma}R(\alpha\beta\gamma) &= i\frac{\partial}{\partial\gamma}e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}e^{-i\gamma J_3} = e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}J_3e^{i\beta J_2}e^{i\alpha J_3}R(\alpha\beta\gamma) \\
&= (J_1\cos\alpha\sin\beta + J_2\sin\alpha\sin\beta + J_3\cos\beta)R(\alpha\beta\gamma)
\end{aligned}
$$

对应的线性方程组为

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}R(\alpha\beta\gamma) = \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial\alpha} \\ i\frac{\partial}{\partial\beta} \\ i\frac{\partial}{\partial\gamma} \end{pmatrix}R(\alpha\beta\gamma)
$$

反解得出

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i\dfrac{\partial}{\partial\alpha} \\ i\dfrac{\partial}{\partial\beta} \\ i\dfrac{\partial}{\partial\gamma} \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma)$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cot\beta & -\sin\alpha & \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} \\ -\sin\alpha\cot\beta & \cos\alpha & \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\dfrac{\partial}{\partial\alpha} \\ i\dfrac{\partial}{\partial\beta} \\ i\dfrac{\partial}{\partial\gamma} \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma)$$

$$= i \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cot\beta\dfrac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\alpha\dfrac{\partial}{\partial\beta} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}\dfrac{\partial}{\partial\gamma} \\ -\sin\alpha\cot\beta\dfrac{\partial}{\partial\alpha} + \cos\alpha\dfrac{\partial}{\partial\beta} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\dfrac{\partial}{\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial}{\partial\alpha} \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma)$$

$$\begin{aligned} J^2 R(\alpha\beta\gamma) &= (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) R(\alpha\beta\gamma) \\ &= -\left(-\cos\alpha\cot\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2 R(\alpha\beta\gamma) \\ &\quad -\left(-\sin\alpha\cot\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2 R(\alpha\beta\gamma) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} R(\alpha\beta\gamma) \\ &= -\cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \cot^2\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{\sin^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + 2\frac{\cot\beta}{\sin\beta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right) \end{aligned}$$

2 随便写写

由 $D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = \langle jm'|R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle$，且 $R(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$，并由变换关系得到

$$R(\alpha\beta\gamma) J_1 R(\alpha\beta\gamma)^{-1} = \sum_{i=1}^{3} J_i R_{i1}(\alpha\beta\gamma)$$

其中为了方便，记 $J_{x,y,z} = J_{1,2,3}$。利用 $R(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3}$，得到

$$
\begin{aligned}
R(\alpha\beta\gamma)J_1R(\alpha\beta\gamma)^{-1} &= e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}e^{-i\gamma J_3}J_1e^{i\gamma J_3}e^{i\beta J_2}e^{i\alpha J_3} \\
&= e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}\left[J_1+\gamma J_2-\frac{1}{2!}\gamma^2J_1-\frac{1}{3!}\gamma^3J_2+\ldots\right]e^{i\beta J_2}e^{i\alpha J_3} \\
&= e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}(J_1\cos\gamma+J_2\sin\gamma)e^{i\beta J_2}e^{i\alpha J_3} \\
&= \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta\cos\gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

以此类推，容易得到

$$
R(\alpha\beta\gamma)J_sR(\alpha\beta\gamma)^{-1}=\sum_{i=1}^{3}J_iR_{is}(\alpha\beta\gamma)
$$

其中，$s=1,2,3$。在这里可以看出在直角坐标的角动量按群元进行变换。

3 D 矩阵的一些信息

https://en.wikipedia.org/wiki/Wigner_D-matrix