第二章作业

1. 课本内习题

2.2 设$A(g_a)$是$G=\{g_a\}$的一个表示，证明：

（1）转置逆矩阵$[A^T(g_a)]^{-1}$和厄米共轭逆矩阵$[A^{\dagger}(g_a)]^{-1}$也是G的表示。并且当$A(g_a)$是不可约或幺正时，他们也是不可约或幺正的。

（2）$A^T(g_a)$和$A^{\dagger}(g_a)$是G的表示吗？

解答

(1)

① 验证保乘关系

同态关系已经建立好了，只要证明满足保乘关系那就是G的表示。

$$\begin{aligned}[A^T(g_a g_b)]^{-1} &= [A^{-1}(g_a g_b)]^T = [A(g_b^{-1} g_a^{-1})]^T = [A(g_b^{-1})A(g_a^{-1})]^T \\ &= [A^{-1}(g_b)A^{-1}(g_a)]^T = [(A(g_a)A(g_b))^{-1}]^T = (A^T(g_b)A^T(g_a))^{-1} \\ &= [A^T(g_a)]^{-1}[A^T(g_b)]^{-1}\end{aligned}$$

② 先证明如果$A(g_a)$是不可约的，$[A^T(g_a)]^{-1}$也是不可约的

由于$A(g_a)$不可约，那么$A(g_a)$的特征标χ^A的模为 1。即

$$\langle\chi^A|\chi^A\rangle = \frac{1}{n}\{|tr[A(e)]|^2 + |tr[A(g_1)]|^2 + \dots +\} = 1$$

对于$[A^T(g_a)]^{-1}$其特征标$\chi^{A'}$的模为

$$\begin{aligned}\langle\chi^{A'}|\chi^{A'}\rangle &= \frac{1}{n}\{|tr[A^T(e)^{-1}]|^2 + |tr[A^T(g_1)^{-1}]|^2 + \dots +\} \\ &= \frac{1}{n}\{|tr[A^{-1}(e)^T]|^2 + |tr[A^{-1}(g_1)^T]|^2 + \dots +\} \\ &= \frac{1}{n}\{|tr[A(e)^T]|^2 + |tr[A(g_1^{-1})^T]|^2 + \dots +\}\end{aligned}$$

注意到矩阵的转置不改变其迹，因此

$$\langle\chi^{A'}|\chi^{A'}\rangle = \langle\chi^A|\chi^A\rangle = 1$$

③ 证明如果$A(g_a)$是幺正的，$[A^T(g_a)]^{-1}$也是幺正的

由于$A(g_a)$是幺正的，即满足对任意$g_\alpha \in G$，有$A(g_a)A^\dagger(g_a)=I$，于是

$$[A^T(g_a)]^{-1}([A^T(g_a)]^{-1})^\dagger=([A(g_a^{-1})]^\dagger A(g_a^{-1}))^T=I^T=I$$

同理，可以证明

$$[A^\dagger(g_a g_b)]^{-1}=[A^\dagger(g_a)]^{-1}[A^\dagger(g_b)]^{-1}$$

并且若$A(g_a)$不可约或幺正，则$[A^\dagger(g_a)]^{-1}$也是不可约或幺正的。需要注意在求迹的时候厄米共轭矩阵的迹跟原矩阵互为共轭，但计算迹的模方是一致的。

（2）不一定。

假设$A^T,A^\dagger$也是表示，那么有

$$A^T(g_1g_2)=A^T(g_1)A^T(g_2)=[A(g_2)A(g_1)]^T=A^T(g_2g_1)$$
$$A^\dagger(g_1g_2)=A^\dagger(g_1)A^\dagger(g_2)=[A(g_2)A(g_1)]^\dagger=A^\dagger(g_2g_1)$$

这意味着$A(g_1g_2)=A(g_2g_1)$。

因此，如果是 Abel 群的话，那么$A^T,A^\dagger$也是表示。

可取D_3群作为反例，二维表示$\varGamma(ad)=\varGamma(b)\neq\varGamma(da)=\varGamma(c)$。

2.3 设$A(g_a)$是有限群$G=\{g_a\}$的一个不可约表示，C是G中的一个共轭类，λ是常数，E是单位矩阵，证明：

$$\sum_{g_a\in G}A(g_a)=\lambda E$$

解答

考虑用舒尔引理证明该题，如果对任意元素$g_\beta\in G$，不可约表示A满足

$$\left(\sum_{g_a\in G}A(g_a)\right)A(g_\beta)=A(g_\beta)\left(\sum_{g_a\in G}A(g_a)\right) \tag{1}$$

那么就有$\sum_{g_a\in G}A(g_a)=\lambda E$。

因此接下来就需要证明(1)式的成立，将其改为

$$\sum_{g_\alpha \in G} A(g_\alpha g_\beta) = \sum_{g_\alpha \in G} A(g_\beta g_\alpha) \tag{2}$$

记g_α的所有共轭类组成的集合为$[g_\alpha]$，如果集合$[g_\alpha]g_\beta = g_\beta[g_\alpha]$，那么(2)式给出相同的矩阵，等式成立。

所以接下来的目标是要证明集合$[g_\alpha]g_\beta = g_\beta[g_\alpha]$，先化为$g_\beta^{-1}[g_\alpha]g_\beta = [g_\alpha]$。

① 先证$g_\beta^{-1}[g_\alpha]g_\beta \subseteq [g_\alpha]$

显然，由共轭类的定义，对$[g_\alpha]$中的任意元素，$g_\beta^{-1}[g_\alpha]g_\beta$作用之后仍然是$g_\alpha$类中的元素。

② 再证$g_\beta^{-1}[g_\alpha]g_\beta = [g_\alpha]$

对$[g_\alpha]$中两个不同元素g_α和g'_α，必然满足$g_\beta^{-1}g_\alpha g_\beta \neq g_\beta^{-1}g'_\alpha g_\beta$，否则可以推出$g_\alpha = g'_\alpha$。

综上，对任意元素$g_\beta \in G$，由于$g_\beta^{-1}[g_\alpha]g_\beta = [g_\alpha]$，所以集合$[g_\alpha]g_\beta = g_\beta[g_\alpha]$。因此

$$\left(\sum_{g_\alpha \in G} A(g_\alpha)\right)A(g_\beta) = A(g_\beta)\left(\sum_{g_\alpha \in G} A(g_\alpha)\right)$$

对于不可约表示 A，由舒尔引理，满足

$$\sum_{g_\alpha \in G} A(g_\alpha) = \lambda E$$

2.7 写出 4 阶循环群Z_4的左正则表示和右正则表示。

解答

正则表示的表示空间为$\{|e\rangle, |a\rangle, |a^2\rangle, |a^3\rangle\}$张成的线性空间。

① 求左正则表示

$$\begin{aligned}
L(a)|e\rangle &= a|e\rangle = |a\rangle \\
L(a)|a\rangle &= a|a\rangle = |a^2\rangle \\
L(a)|a^2\rangle &= a|a^2\rangle = |a^3\rangle \\
L(a)|a^3\rangle &= a|a^3\rangle = |e\rangle
\end{aligned}$$

写成矩阵的形式为

$$
\begin{aligned}
L(a)\left(|e\rangle,|a\rangle,|a^2\rangle,|a^3\rangle\right) &= \left(L(a)|e\rangle, L(a)|a\rangle, L(a)|a^2\rangle, L(a)|a^3\rangle\right) \\
&= \left(|e\rangle,|a\rangle,|a^2\rangle,|a^3\rangle\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即左正则表示为

$$
L(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; L(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

其他元素可由$L(a)$生成。

② 求右正则表示

$$
\begin{aligned}
&R(a)|e\rangle = |e\rangle a^{-1} = |a^3\rangle \\
&R(a)|a\rangle = |a\rangle a^{-1} = |e\rangle \\
&R(a)|a^2\rangle = |a^2\rangle a^{-1} = |a^1\rangle \\
&R(a)|a^3\rangle = |a^3\rangle a^{-1} = |a^2\rangle
\end{aligned}
$$

写成矩阵的形式为

$$
\begin{aligned}
R(a)\left(|e\rangle,|a\rangle,|a^2\rangle,|a^3\rangle\right) &= \left(R(a)|e\rangle, R(a)|a\rangle, R(a)|a^2\rangle, R(a)|a^3\rangle\right) \\
&= \left(|e\rangle,|a\rangle,|a^2\rangle,|a^3\rangle\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即右正则表示为

$$
R(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; R(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

其他元素可由$R(a)$生成。

2.8 设$A^p(g_a)$、 $A^r(g_a)$是群$G=\{g_a\}$的两个不等价不可约表示，证明：直积表示$A^p(g_a)\otimes A^{r^*}(g_a)$不包含恒

等表示，而$A^p(g_a)\otimes A^{p^*}(g_a)$包含恒等表示一次且仅一次。

直积表示$C^{p\otimes r^*}(g_a)=A^p(g_a)\otimes A^{r^*}(g_a)$的特征标为

$$\chi^C(g_a)=\chi^{A^p}(g_a)\chi^{A^r}(g_a)^*$$

出现恒等表示的次数

$$m=\langle\chi^S|\chi^C\rangle=\frac{1}{n}\sum\chi^C(g_i)=\frac{1}{n}\sum\chi^{A^p}(g_a)\chi^{A^r}(g_a)^*=\delta_{pr}$$

最后一个等号用了特征标第一正交定理。

2. 有限群D_{2n}由两个生成元a和b生成，它们满足定义关系

$$\begin{cases}a^n=b^2=e\\ b^{-1}aba=e\end{cases}$$

其中$n\geqslant 3$为自然数。讨论该群的全部不等价不可约酉表示。

解答：

【分三步，首先分为 n 为偶数和奇数两种情况讨论D_{2n}一共有多少个类，由 Burnside 定理确定表示的维数；然后由定义关系给出一维表示，并猜出二维表示；最后验证所有这些表示是不等价且不可约的。】

由定义关系，这两个生成元可以生成$2n$个群元素，分别为$\{e,a,a^2,...,a^{n-1},b,ab,a^2b,...,a^{n-1}b\}$，可以验证

$$H=\{e,a,a^2,...,a^{n-1}\}$$

是群D_{2n}的不变子群，G 可以写为

$$G=H\otimes_S\{e,b\}$$

因为$\{e,b\}$不是D_{2n}的不变子群，所以是半直积。这导致了我们不能通过H和$\{e,b\}$的不可约表示来直积得到D_{2n}的不可约表示。所以只能老老实实按下面三步来得到D_{2n}的不可约表示。

① 证明当$n=2k(k\geqslant 2,k\in Z)$时，$D_{2n}$一共有$k+3$个类，用$[a]$表示与$a$同类元素的集合，分别为

$$
\begin{aligned}
[e] &= \{e\} \\
[a] &= \{a, a^{-1}\} \\
&\dots \\
[a^{k-1}] &= \{a^{k-1}, a^{1-k}\} \\
[a^k] &= \{a^k\} \\
[ab] &= \{a^{2s-1}b\ (s=1,2,\dots,k)\} \\
[a^2b] &= \{a^{2s}b\ (s=1,2,\dots,k)\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

由 Burnside 定理，可以有 4 个一维表示和 k-1 个二维表示，不过可能存在其他解。(3)的证明见附录。

② 接下来给出 4 个一维表示和 k-1 个二维表示。

由定义关系，且 n 为偶数时，满足

$$
\begin{cases} a^n = b^2 = 1 \\ (ba)^2 = 1 \end{cases}
$$

解为

$$
\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}
$$

对应 4 个一维表示。

再给出 k-1 个二维表示，猜测为

$$
\begin{aligned}
\phi_m\colon a &\mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \\
b &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中$m = 1, 2, \dots, k-1$，显然这个映射满足了定义关系，那么就能满足保乘关系，也就是个二维表示，并且是酉表示，记为A_m。

③ 最后证明这 k-1 个二维表示是不等价且不可约的。

先证不可约。$\chi_m(a^t) = e^{\frac{2m\pi i}{n}t} + e^{-\frac{2m\pi i}{n}t} = 2\cos\left(\frac{2m\pi}{n}t\right)$，$\chi_m(a^t b) = 0$，特征标表为

	e	$[a]$	$\dots$	$[a^k]$	$[ab]$	$[a^2b]$
类的个数	1	2	…	1	k	k
χ^{A_m}	2	$2\cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)$	…	$2\cos\left(\frac{2m\pi}{n}k\right)$	0	0

其特征标的内积为

$$\begin{aligned}\langle\chi^{A_m}|\chi^{A_m}\rangle &= \frac{1}{2n}\left(2\times 2+2\times 4\cos^2\left(\frac{2m\pi}{n}\right)+\dots+2\times 4\cos^2\left(\frac{2m\pi}{n}(k-1)\right)+4\cos^2\left(\frac{2m\pi}{n}k\right)\right)\\ &=\frac{1}{k}\left[1+2\sum_{t=1}^{k-1}\cos^2\left(\frac{2m\pi}{n}t\right)+\cos^2\left(\frac{2m\pi}{n}k\right)\right]\\ &=\frac{1}{k}\left[1+\sum_{t=1}^{k-1}\left(1+\cos\left(\frac{4m\pi}{n}t\right)\right)+1\right]\\ &=\frac{1}{k}\left[k+1+\sum_{t=1}^{k-1}\cos\left(\frac{4m\pi}{n}t\right)+\cos\left(\frac{4m\pi}{n}k\right)-\cos\left(\frac{4m\pi}{n}k\right)\right]\\ &=\frac{1}{k}\left[k+\sum_{t=1}^{k}\cos\left(\frac{4m\pi}{n}t\right)\right]\\ &=1\end{aligned}$$

由上式得出A_m是不可约的。

再证明不等价。由特征标表看出，对$m=1,2,\dots,k-1$，不同的 m 给出不同的特征标，因而这些A_m是不等价的。

综上，当$n=2k(k\geqslant 2,k\in Z)$时，存在 4 个一维表示和 k-1 个二维表示。

对$n=2k+1(k\geqslant 1,k\in Z)$采取相同的方式，得到 k+2 个类为

$$\begin{aligned}[e] &= \{e\}\\ [a] &= \{a,a^{-1}\}\\ &\dots\\ [a^{k-1}] &= \{a^{k-1},a^{1-k}\}\\ [a^k] &= \{a^k,a^{-k}\}\\ [b] &= \{a^s b\ (s=1,2,\dots,n)\}\end{aligned}$$

由 Burnside 定理，可以有 2 个一维表示和 k 个二维表示。一维表示分别为

$$\begin{cases}a\mapsto 1\\ b\mapsto 1\end{cases},\begin{cases}a\mapsto 1\\ b\mapsto -1\end{cases}$$

二维表示为

$$\phi_m:\ a \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix}$$
$$b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$m=1,2,\ldots,k$。

3. 仿照 Dirac 群的讨论方法，从群表示论的观点讨论 Pauli 群的矩阵表示。

解答

Pauli 代数三个生成元$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$满足的代数结构为

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i=2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ \sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij} \end{cases} \tag{4}$$

由其代数结构可以得到生成元应为$\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,i\}$，满足定义关系

$$\begin{cases} \sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=i^4=e \\ (i\sigma_x\sigma_y)^2=(i\sigma_x\sigma_z)^2=(i\sigma_y\sigma_z)^2=e \\ i^3\sigma_x\sigma_y\sigma_z=e \end{cases}$$

由生成元和定义关系可以构造出 16 个群元素。将单位元e记为1，i^2记为-1，这 16 个群元素为

$$\{\pm 1,\pm i,\pm\sigma_x,\pm\sigma_y,\pm\sigma_z,\pm\sigma_x\sigma_y,\pm\sigma_x\sigma_z,\pm\sigma_y\sigma_z\}$$

注意到$\sigma_x\sigma_y=i\sigma_z$，这 16 个群元素通常写为

$$\{\pm 1,\pm i,\pm\sigma_x,\pm\sigma_y,\pm\sigma_z,\pm i\sigma_x,\pm i\sigma_y,\pm i\sigma_z\}$$

不难得出，Pauli 群一共有 10 个类，分别为

$$\{1\},\{-1\},\{i\},\{-i\},\{\pm\sigma_x\},\{\pm\sigma_y\},\{\pm\sigma_z\},\{\pm i\sigma_x\},\{\pm i\sigma_y\},\{\pm i\sigma_z\}$$

由 Burnside 定理

$$\sum_{i=1}^{10} S_i^2=16$$

只有一个解，即 2 个二维表示和 8 个一维表示。

接下来求出其中 1 个二维表示。

利用 Maschke 定理，可以要求$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$是幺正的，进而$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$是厄米的。由厄米矩阵可以用幺正矩阵对角化，假设$\sigma_z$是对角矩阵，考虑$\sigma_z^2=1$，并且由于$tr(\sigma_z)=-tr(\sigma_z)$，因而$tr(\sigma_z)=0$，可以令

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

代入代数结构(4)，得到其他两个矩阵为

$$\sigma_{x,y}=\begin{pmatrix}0 & a_{x,y}\\ a_{x,y}^* & 0\end{pmatrix}$$

满足$a_i^* a_j+a_j^* a_i=2\delta_{ij}$，可取一组解为

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

4. 计算D_3群在四维空间$V_4=\{\phi_1=x^3,\phi_2=x^3y,\phi_3=xy^2,\phi_4=y^3\}$中的表示, 并对该表示的矩阵和函数基分别进行约化。

解答

① 求表示

在D_3群取生成元$\{d,a\}$，D_3群表示为$\{e,d,d^2,a,ad,ad^2\}$。

先求$A(a)$，有

$$\begin{aligned}
a\circ\phi_1(\boldsymbol{r})&=\phi_1(a^{-1}\boldsymbol{r})=\phi_1(a\boldsymbol{r})=x'^3=-x^3\\
a\circ\phi_2(\boldsymbol{r})&=\phi_2(a^{-1}\boldsymbol{r})=\phi_2(a\boldsymbol{r})=x'^2y'=x^2y\\
a\circ\phi_3(\boldsymbol{r})&=\phi_3(a^{-1}\boldsymbol{r})=\phi_3(a\boldsymbol{r})=x'y'^2=-xy^2\\
a\circ\phi_4(\boldsymbol{r})&=\phi_4(a^{-1}\boldsymbol{r})=\phi_4(a\boldsymbol{r})=y'^3=y^3
\end{aligned}$$

因此

$$a\circ(\phi_1(\boldsymbol{r}),\phi_2(\boldsymbol{r}),\phi_3(\boldsymbol{r}),\phi_4(\boldsymbol{r}))=(\phi_1(\boldsymbol{r}),\phi_2(\boldsymbol{r}),\phi_3(\boldsymbol{r}),\phi_4(\boldsymbol{r}))\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A(a)=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

同理，得到

$$A(d)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}&-3&-3\sqrt{3}\\3\sqrt{3}&5&\sqrt{3}&-9\\-9&-\sqrt{3}&5&-3\sqrt{3}\\3\sqrt{3}&-3&\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$$

其他表示由这两个生成就行。

② 对矩阵进行约化

写出特征标表

	e	$\{d,f\}$	$\{a,b,c\}$
χ^S	1	1	1
χ^{A_1}	1	1	-1
χ^{Γ}	2	-1	0
χ^{A}	4	1	0

接下来由特征标求出表示 A 中有哪些不可约表示，

$$m_S=\langle\chi^S|\chi^A\rangle=\frac{1}{6}(1\times1\times4+2\times1\times1)=1$$

$$m_{A_1}=\langle\chi^{A_1}|\chi^A\rangle=\frac{1}{6}(1\times1\times4+2\times1\times1)=1$$

$$m_{\Gamma}=\langle\chi^{\Gamma}|\chi^A\rangle=\frac{1}{6}(1\times2\times4+2\times(-1)\times1)=1$$

因而表示 A 可以通过相似变换化为

$$A=\Gamma\oplus A_1\oplus S$$

即约化为

$$A(g)=\begin{pmatrix}\Gamma(g) & 0 & 0\\ 0 & A(g) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

③ 最后要得到函数基的约化

即通过广义投影算符来投影出荷载不可约表示的基。

首先得到三个不可约表示对应的投影算符为

$$P_1^{\Gamma}=\frac{1}{3}\left(T_e-\frac{1}{2}T_d-\frac{1}{2}T_f+T_a-\frac{1}{2}T_b-\frac{1}{2}T_c\right)$$
$$P_2^{\Gamma}=\frac{1}{3}\left(T_e-\frac{1}{2}T_d-\frac{1}{2}T_f-T_a+\frac{1}{2}T_b+\frac{1}{2}T_c\right)$$
$$P_1^{S}=\frac{1}{6}(T_e+T_d+T_f+T_a+T_b+T_c)$$
$$P_1^{A_1}=\frac{1}{6}(T_e+T_d+T_f-T_a-T_b-T_c)$$

其中，$T_g\phi(\boldsymbol{r})=g\circ\phi(\boldsymbol{r})=\phi(g^{-1}\boldsymbol{r})$。

首先求Γ对应约化空间的函数基。

投影算符P_1^{Γ}作用在$\Psi=\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4=x^3+x^3y+xy^2+y^3$上，得

$$
\begin{aligned}
P_1^{\Gamma}\Psi &= \frac{1}{3}\left(T_e-\frac{1}{2}T_d-\frac{1}{2}T_f+T_a-\frac{1}{2}T_b-\frac{1}{2}T_c\right)\Psi \\
&= \frac{1}{3}\left(T_e-\frac{1}{2}T_d-\frac{1}{2}T_f+T_a-\frac{1}{2}T_b-\frac{1}{2}T_c\right)(\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4) \\
&= \frac{1}{3}\left(T_e-\frac{1}{2}T_d-\frac{1}{2}T_f+T_a-\frac{1}{2}T_b-\frac{1}{2}T_c\right)(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\left[A(e)-\frac{1}{2}A(d)-\frac{1}{2}A(f)+A(a)-\frac{1}{2}A(b)-\frac{1}{2}A(c)\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\left[A(e)-\frac{1}{2}A(d)-\frac{1}{2}A^2(d)+A(a)-\frac{1}{2}A(a)A(d)-\frac{1}{2}A(a)A^2(d)\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{9}{4}\\0&0&0&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{9}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix} \\
&= \phi_2+\phi_4
\end{aligned}
$$

历经千辛万苦终于投影出来Γ的一个基$\Psi_1^{\Gamma}=\phi_2+\phi_4$，接下来通过转移算符

$$
P_{21}^{\Gamma}=\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}T_d+\frac{\sqrt{3}}{2}T_f+\frac{\sqrt{3}}{2}T_b-\frac{\sqrt{3}}{2}T_c\right)
$$

来转移出另一个基Ψ_2^{Γ}。

$$
\begin{aligned}
P_{21}^{\Gamma}\Psi_1^{\Gamma} &= P_{21}^{\Gamma}(\phi_2+\phi_4) \\
&= \frac{1}{3}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}A(d)+\frac{\sqrt{3}}{2}A^2(d)+\frac{\sqrt{3}}{2}A(a)A(d)-\frac{\sqrt{3}}{2}A(a)A^2(d)\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}3\\0\\3\\0\end{pmatrix} \\
&= \phi_1+\phi_3
\end{aligned}
$$

然后是A_1对应空间的基，同样的操作可得

$$P_1^{A_1}\Psi=\frac{1}{6}(T_e+T_d+T_f-T_a-T_b-T_c)(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\left[A(e)+A(d)+A^2(d)-A(a)-A(a)A(d)-A(a)A^2(d)\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0\\-\frac{9}{2}&0&\frac{9}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=0$$

很遗憾。但通过观察矩阵的结构，我们可以取$\Psi=\phi_1+\phi_2+2\phi_3+\phi_4=x^3+x^3y+2xy^2+y^3$，这样可以投影出

$$P_1^{A_1}\Psi=\frac{1}{6}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0\\-\frac{9}{2}&0&\frac{9}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\0\\\frac{9}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\phi_1+\frac{3}{4}\phi_3$$

因此获得$\Psi_1^{A_1}=-\frac{1}{4}\phi_1+\frac{3}{4}\phi_3$。

最后，Ψ_1^S为

$$P_1^S\Psi=\frac{1}{6}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{9}{2}&0&-\frac{9}{2}\\0&0&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\begin{pmatrix}0\\-\frac{9}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{3}{4}\phi_2+\frac{1}{4}\phi_4$$

综上，获得了

$$\Psi_1^{\Gamma}=\phi_2+\phi_4$$
$$\Psi_2^{\Gamma}=\phi_1+\phi_3$$
$$\Psi_1^{A_1}=-\frac{1}{4}\phi_1+\frac{3}{4}\phi_3$$
$$\Psi_1^{S}=-\frac{3}{4}\phi_2+\frac{1}{4}\phi_4$$

由于取Ψ函数时的任意性，这些基不一定归一，并且可以有多种选择。可以验证$\Psi_1^{A_1},\Psi_1^S$都是 G 不变的，而$\Psi_1^{\Gamma},\Psi_2^{\Gamma}$不是 G 不变的，也就是求出的基不一定是荷载该表示的基。

【 附 录 】

1. (3)式 k+3 个类的证明。

① 由定义关系容易得到$a^{m}b=ba^{-m}$，因而$a^{k}b=ba^{k}$，即a^{k}与所有元素对易，跟e一样自成一类。

② 然后证明$[a^{m}]=\{a^{m},a^{-m}\}\,(m=1,2,...,k-1)$：

按照找共轭元素的一般方法，取 G 中所有元素跟a^{m}作共轭运算，先取$x=a^{t}\,(1\leqslant t\leqslant n-1)$得到

$x^{-1}a^{m}x=a^{m}$，再取$x=a^{t}b(1\leqslant t\leqslant n-1)$得到

$$x^{-1}a^{m}x=(a^{t}b)^{-1}a^{m}a^{t}b=ba^{m}b=a^{-m}$$

③ 最后证明$[ab]=\{a^{2s-1}b\ \ (s=1,2,...,k)\}$：

先证$\{a^{2s-1}b\ \ (s=1,2,...,k)\}\subseteq[ab]$，即证每个$a^{2s-1}b$都跟$ab$是同一类。用数学归纳法，当$s=1$时，

$a^{2s-1}b=ab$显然满足。如果$a^{2s-1}b$跟ab同类可以推出$a^{2(s+1)-1}b=a^{2s+1}b$也跟ab同类，那就 OK 了。

若$a^{2s-1}b$跟ab同类，则存在群元x满足

$$a^{2s-1}b=x^{-1}abx$$

那么

$$a^{2(s+1)-1}b=a^{2s+1}b=aa^{2s-1}ab=aa^{2s-1}ba^{-1}=ax^{-1}abxa^{-1}=(xa^{-1})^{-1}ab\,(xa^{-1})$$

因此，每个$a^{2s-1}b$都跟ab同类。

再证$[ab]\subseteq\{a^{2s-1}b\ \ (s=1,2,...,k)\}$，即证 G 中所有元素跟$ab$作共轭之后的元素都在

$\{a^{2s-1}b\ \ (s=1,2,...,k)\}$内。先取$x=a^{t}\,(1\leqslant t\leqslant n-1)$，有$x^{-1}abx=a^{-t}aba^{t}=a^{-t}aa^{-t}b=a^{1-2t}b\in$

$\{a^{2s-1}b\ \ (s=1,2,...,k)\}$，再取$x=a^{t}b(1\leqslant t\leqslant n-1)$，有$x^{-1}abx=a^{2t-1}b\in\{a^{2s-1}b\ \ (s=1,2,...,k)\}$。

同样的方式可证$[a^{2}b]=\{a^{2s}b\ \ (s=1,2,...,k)\}$。

PS:感谢这个有用的符号运算工具[https://live.sympy.org/]