第四章作业

1. 韩其智、孙洪洲《群论》 p327 5.1 ~ 5.5

5.1 求 5 阶对称群 S5 的类，指出 S5 的哪些杨图是自轭的，哪些杨图是互为共轭的。

Answer:

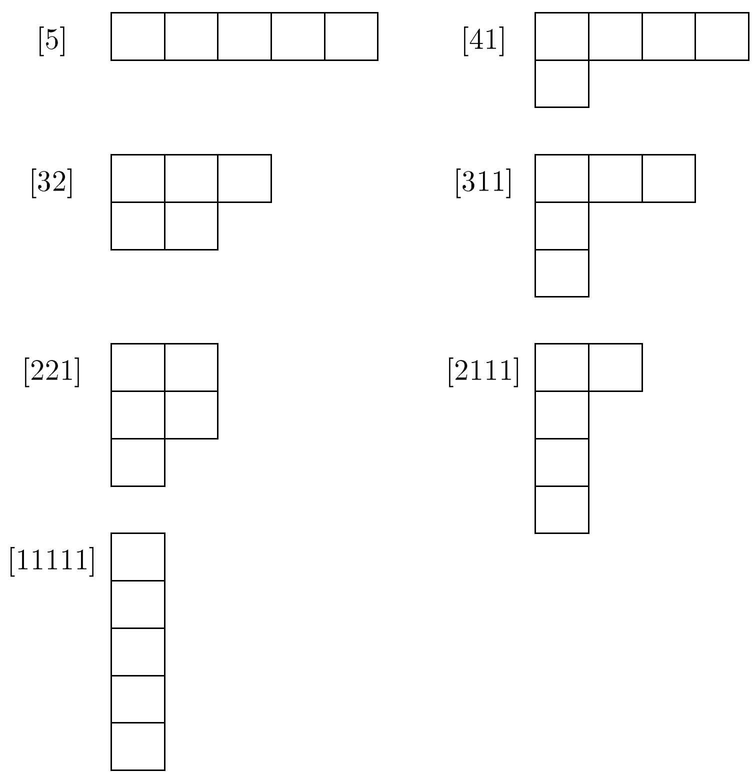

图 1 S5 的杨图

由于杨图的个数等于类的个数，因此一共有 7 个类。容易看出[311]是自轭的。[5]和[11111]互为共轭，[41]和[2111]互为共轭，[32]和[221]互为共轭。

5.2 找出 4 阶对称群 S4 的所有不变子群，指出哪个不变子群的商群和 S3 同构。

Answer:

（1）首先用类的组合来构成集合。

S4 一共有 24 个元素。写成轮换结构为

(1^4): e
(13):(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)
(2^2):(12) (34), (13) (24), (14) (23)
$(1^2 2)$:(34),(24),(23),(14),(13),(12)
(4):(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)

（2）然后判断组成的集合是否是子群。

首先作为群一定包含了 e，其次考虑拉格朗日定理，非平凡子群的阶需为$2,3,4,6,8,12$其中一个。

因此，不变子群可能的选项有只有两个

$$G=\{e,\ (12)\,(34),\ (13)\,(24),\ (14)\,(23)\}$$

$$A_4=\{e,\ (12)\,(34),\ (13)\,(24),\ (14)\,(23),\ (123),\ (132),\ (124),\ (142),\ (134),\ (143),\ (234),\ (243)\}$$

容易验证上面两个集合均满足封闭性且包含逆元，构成子群，因此是不变子群。

（3）判断同构关系。

两个不变子群对应的商群的群元素个数分别为 6 和 2，显然商群S_4/A_4不可能跟 S3 同构。那么考虑S_4/G跟 S3 的同构关系。一个自然的想法就是用 S3 的元素去左乘这个不变子群，确定不同的元素是不同陪集的代表元。

$$S_3=\{e,\ (23),\ (13),\ (12),\ (123),\ (132)\}$$

容易给出（见附录）

$$(23)G=\{(23),(1243),(1342),(14)\}$$
$$(13)G=\{(13),(1432),(24),(1234)\}$$
$$(12)G=\{(12),(34),(1423),(1324)\}$$
$$(123)G=\{(123),(243),(142),(134)\}$$
$$(132)G=\{(132),(143),(234),(124)\}$$

因此，$S_4/G=\{G,\ (23)G,\ (13)G,\ (12)G,\ (123)G,\ (132)G\}$跟 S3 同构。

5.3 设 An 是 n 阶对称群 Sn 的偶置换子群，证明:An 是 Sn 的不变子群,并求出商群 Sn/An。

偶置换子群的定义是所有偶置换构成的集合，单位元包含在这个集合里面。

（1）首先证明是个子群。

因为任意置换有确定的奇偶性，即写成对换乘积形式所用对换的个数的奇偶性是确定，所以逆和封闭性是满足的，因此构成一个子群 An。

（2）接着证明是不变子群。

由于 Sn 中的元素无非就是偶置换和奇置换，且因为$uS_n=S_n$所以偶置换和奇置换个数相等。可以直接根据偶置换子群个数为 Sn 的一半得出它是不变的（左陪集=右陪集=所有奇置换的集合）。

也可以按定义，对$\forall h\in A_n,\ u\in S_n$，有

$$uhu^{-1}\in A_n$$

因此，An 是不变子群。取 1 个奇置换的元素做uH即可构造另一半的奇置换。因此，商群为

$$S_n/A_n=\{A_n,(12)A_n\}$$

5.4 5 阶对称群 S5 有多少个不等价不可约表示？每个维数是多少？

Answer： 由 5.1 可知，S5 一共有 7 个类，因此由 7 个不等价不可约表示。

[5] $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline\end{array}$

[41] $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}$

[32] $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&\multicolumn{1}{c|}{5}\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&\multicolumn{1}{c|}{5}\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&\multicolumn{1}{c|}{4}\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&\multicolumn{1}{c|}{5}\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&\multicolumn{1}{c|}{4}\\\cline{1-2}\end{array}$

[311] $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}$

[221] $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}$

[2111] $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}$

[11111] $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline 5\\\hline\end{array}$

由标准杨盘可以看出每个的维数分别为 $1,4,5,6,5,4,1$ 。用 Burnside 定理可以验证正确性。其实用钩长图去计算维数更好，可以避免遗漏。

$$f^{[\lambda]} = \frac{n!}{\prod\limits_{ij} g_{ij}}$$

5.5 求 4 阶对称群 S4 的不可约表示 $[\lambda]=[22]$。

Answer:

解法 1：杨算符

[22]的两个标准杨盘如下所示

$$T_1^{[22]}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad T_2^{[22]}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

满足$T_2^{[22]}=\sigma_{21}T_1^{[22]}=(23)T_1^{[22]}$。

不可约表示的维数是 2。构造两个基

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi(1234) \\ \psi_2 &= (23)\psi_1 = \psi(1324)\end{aligned}$$

标准杨盘$T_1^{[22]}$对应的杨算符$E(T_1^{[22]})=P(T_1^{[22]})Q(T_1^{[22]})$，其中

$$\begin{aligned}
P(T_1^{[22]}) &= [e+(12)][e+(34)] = [e+(12)+(34)+(12)(34)] \\
Q(T_1^{[22]}) &= [e-(13)][e-(24)] = [e-(13)-(24)+(13)(24)] \\
E(T_1^{[22]}) &= P(T_1^{[22]})Q(T_1^{[22]}) = [e+(12)+(34)+(12)(34)][e-(13)-(24)+(13)(24)] \\
&= e-(13)-(24)+(13)(24)+(12)-(132)-(124)+(1324) \\
&\quad +(34)-(143)-(234)+(1423)+(12)(34)-(1432)-(1234)+(14)(23)
\end{aligned}$$

同理，标准杨盘$T_2^{[22]}$对应杨算符也可以给出

$$\begin{aligned}
P(T_2^{[22]}) &= [e+(13)][e+(24)] = [e+(13)+(24)+(13)(24)] \\
Q(T_2^{[22]}) &= [e-(12)][e-(34)] = [e-(12)-(34)+(12)(24)] \\
E(T_2^{[22]}) &= P(T_1^{[22]})Q(T_1^{[22]}) = [e+(13)+(24)+(13)(24)][e-(12)-(34)+(12)(34)] \\
&= e+(13)+(24)+(13)(24)-(12)-(123)-(142)-(1423) \\
&\quad -(34)-(134)-(243)-(1324)+(12)(34)+(1234)+(1432)+(14)(23)
\end{aligned}$$

接着可以给出两个基矢量。

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 = E(T_1^{[22]})\psi_1 = E(T_1^{[22]})\psi(1234) \\
&= \psi(1234) + \psi(1243) + \psi(2134) + \psi(2143) + \psi(3412) + \psi(3421) + \psi(4312) + \psi(4321) \\
&\quad - \psi(1342) - \psi(1432) - \psi(2341) - \psi(2431) - \psi(3214) - \psi(3124) - \psi(4213) - \psi(4123)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_2 = E(T_2^{[22]})\psi_2 = E(T_2^{[22]})\psi(1324) \\
&= \psi(1324) + \psi(1342) + \psi(2413) + \psi(2431) + \psi(3124) + \psi(3142) + \psi(4213) + \psi(4231) \\
&\quad - \psi(1243) - \psi(1423) - \psi(2134) - \psi(2314) - \psi(3241) - \psi(3421) - \psi(4132) - \psi(4312)
\end{aligned}
$$

接着，把 S4 的 24 个群元素对应的 3 个生成元$(12),(23),(34)$作用到该基上，得到

$$
\begin{aligned}
(12)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}\\
(23)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}\\
(34)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

解法 2

利用课件中所谓的规则，可以得到酉表示为

$$
\begin{aligned}
U^{[22]}(1,2) &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
U^{[22]}(2,3) &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\\
U^{[22]}(3,4) &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. 利用 S4 的特征标，计算 S4 的两个不可约表示的直积分解：

$$[4]\otimes[22],\ [31]\otimes[31],\ [31]\otimes[22]$$

Answer:

表 1 S4 特征标表

S4	(1^4)	$6(1^2 2)$	$8(13)$	$3(2^2)$	$6(4)$
[4]	1	1	1	1	1
[31]	3	1	0	-1	-1
[22]	2	0	-1	2	0
[211]	3	-1	0	-1	1
[1111]	1	-1	1	1	-1
$[4]\otimes[22]$	2	0	-1	2	0
$[31]\otimes[31]$	9	1	0	1	1
$[31]\otimes[22]$	6	0	0	-2	0

利用特征标正交关系可以投影出

$$\begin{aligned}
[4]\otimes[22] &= [22] \\
[31]\otimes[31] &= [4]\oplus[31]\oplus[22]\oplus[211] \\
[31]\otimes[22] &= [31]\oplus[211]
\end{aligned}$$

由等式两边表示的维数相等可以验证其正确性。

附录

1　利用 Python 的 sympy 库进行快速置换群的运算。

如要计算$(13)\cdot(12)$，执行

```
from sympy.combinatorics import Permutation
a = Permutation(1,2)
b = Permutation(1,3)
print(a*b)
```

得到结果(123)。需要注意这里面的乘法规定，先作用的要放在左边。