

置换群特征标规则

1 规则

1. 画出杨图

2. 对于给定类 $(1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots)$ 依次给出

$$1, 2, 3, \dots, \nu_1, \underbrace{\nu_1 + 1, \nu_1 + 1, \nu_1 + 2, \nu_1 + 2, \dots}_{\nu_2 \text{对}}$$

比如 $(1^3, 2), (1^2, 3), (1, 2^2), (1, 4), (2, 3), (5)$ 分别需要给出

$(1^3, 2): 12344$

$(1^2, 3): 12333$

$(1, 2^2): 12233$

$(1, 4): 12222$

$(2, 3): 11222$

$(5): 11111$

3. 接下来就需要按照一定规则在杨图上添上这些数字。

[1] 数字从小到大填入杨图，需要满足从左到右不减，从上到下也不减。

[2] 相同的数字必须连在一块。如下图所示，前两个是允许的，最后一个是不允许的。

2	2	
2		

2	2	2

	2	2
2		

[3] 不允许在一个田字形出现完全相同的数字。

4. 接下来就需要根据填出来的杨图进行运算得到特征标。

如果在杨图的一种填法中，相同的数字占了偶数行则给出一个-1，没有就给出一个1，然后把各种填法结果相加就得到特征标。

比如：

1	4
2	4
3	

1
2
2
2
2

左图 4 占了 2 行，因此给出一个-1，右图 2 占了 4 行，因此也给出一个-1。对于

1	3
2	3
2	

给出了两个-1，所以最终是给出一个1。

2 求 S5 特征标表^[2]

	$[1^5]$	$[2^1, 1^3]$	$[2^2, 1^1]$	$[3^1, 1^2]$	$[3^1, 2^1]$	$[4^1, 1^1]$	$[5^1]$
#	1	10	15	20	20	30	24
$s[5^1]$	1	1	1	1	1	1	1
$s[4^1, 1^1]$	4	2	0	1	-1	0	-1
$s[3^1, 2^1]$	5	1	1	-1	1	-1	0
$s[3^1, 1^2]$	6	0	-2	0	0	0	1
$s[2^2, 1^1]$	5	-1	1	-1	-1	1	0
$s[2^1, 1^3]$	4	-2	0	1	1	0	-1
$s[1^5]$	1	-1	1	1	-1	-1	1

特征标表第一行是恒等表示，只有一种填法。第一列是表示的维数，可以通过钩长图去求。

接下来按顺序求剩下的特征标。

(1) 先求表示 $[4, 1]$ 的特征标 $\chi^{[4, 1]}$ ，给出杨图

类 $(1^3, 2)$ 给出数字 $1, 2, 3, 4, 4$ ，按规则填入杨图有两种填法。

1	2	4	4
3			

1	3	4	4
2			

分别给出两个 1，因此特征标为 $\chi_{(1^3, 2)}^{[4, 1]} = 1 + 1 = 2$ 。

类 $(1, 2^2)$ 给出数字 $1, 2, 2, 3, 3$ ，可以发现没有满足规则的填法，因此 $\chi_{(1, 2^2)}^{[4, 1]} = 0$ 。

类 $(1^2, 3)$ 给出数字 $1, 2, 3, 3, 3$ ，有一种填法。

1	3	3	3
2			

因此 $\chi_{(1^2, 3)}^{[4, 1]} = 1$ 。

类 $(2, 3)$ 给出数字 $1, 1, 2, 2, 2$ ，有一种填法。

1	2	2	2
1			

给出一个 -1， $\chi_{(2, 3)}^{[4, 1]} = -1$ 。

类 $(1, 4)$ 给出数字 $1, 2, 2, 2, 2$ ，没有满足规则的填法，因此 $\chi_{(1, 4)}^{[4, 1]} = 0$ 。

类 (5) 给出数字 $1, 1, 1, 1, 1$ ，给出一种填法。

1	1	1	1
1			

给出一个-1, $\chi_{(5)}^{[4,1]} = -1$ 。

这就给出了不可约表示 $[4, 1]$ 的全部特征标, 其他按同样方法可以给出。

参考

[1] 物理学中的群论基础, 徐建军

[2] 特征标表 <https://www.jgibson.id.au/articles/characters/>