朗道能级怎么来的？

Kean 2021-05-07

1 电磁场中的哈密顿量

电子在电磁场中的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m_e}(\boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A})^2 - e\varphi$$

为什么具有这个形式，将其代入哈密顿正则方程试试

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}}$$
$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}$$

可得其分量为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m_e}(P_x + eA_x)$$
$$\frac{dP_x}{dt} = -\frac{e}{m_e}\left[(P_x + eA_x)\frac{\partial A_x}{\partial x} + (P_y + eA_y)\frac{\partial A_y}{\partial x} + (P_z + eA_z)\frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + e\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

进一步求导得

$$
\begin{aligned}
m_e \frac{d^2 x}{dt^2} &= m_e \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = m_e \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{m_e}(P_x + eA_x)\right] = \frac{dP_x}{dt} + e\frac{dA_x}{dt} \\
&= -\frac{e}{m_e}\left[(P_x + eA_x)\frac{\partial A_x}{\partial x} + (P_y + eA_y)\frac{\partial A_y}{\partial x} + (P_z + eA_z)\frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + e\frac{dA_x}{dt} + e\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= -e\left[\frac{dx}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + e\left[\frac{dx}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right] + e\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= -e\left[\frac{dx}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{dx}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{dy}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{dz}{dt}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right] + e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= -e[\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_x + e\left(\nabla\varphi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_x
\end{aligned}
$$

最终得到

$$
\begin{aligned}
m_e \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} &= -e[\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})] + e\left(\nabla\varphi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \\
&= -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E})
\end{aligned}
$$

此即洛伦兹力公式。由此式证明上面的哈密顿量应该是对的。

进一步，将正则动量量子化为$\boldsymbol{P} \to -i\hbar\nabla$，得到

$$
H = \frac{1}{2m_e}(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A})^2 - e\varphi
$$

采用横波条件$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，哈密顿量可以写为

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m_e}(\boldsymbol{P}^2 + e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} + e^2\boldsymbol{A}^2) - e\varphi \\
&= \frac{1}{2m_e}(-\hbar^2\nabla^2 - ei\hbar\boldsymbol{A} \cdot \nabla + e^2\boldsymbol{A}^2) - e\varphi
\end{aligned}
$$

2 朗道能级

现有一均匀磁场沿 z 方向，即$\boldsymbol{B}=B\hat{\boldsymbol{k}}$。

取朗道规范$A_y=Bx,\ A_x=\ A_z=0$，容易验证$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\ \nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。由于没有电场，可以令$\varphi=0$。此时，哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2m_e}[P_x^2+(P_y+eBx)^2+P_z^2]$$

由于$[P_y,H]=[P_z,H]=0$，表示具有相同的本征态，因此，能量本征态具有形式

$$\psi(x,y,z)=e^{i(k_y y+k_z z)}\phi(x)$$

接下来看看$\phi(x)$究竟是什么。可以将哈密顿量写成

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2m_e}[P_x^2+(\hbar k_y+eBx)^2+(\hbar k_z)^2]\\&=\frac{P_x^2}{2m_e}+\frac{e^2B^2}{2m_e}\left(\frac{\hbar k_y}{eB}+x\right)^2+\frac{(\hbar k_z)^2}{2m_e}\\&=\frac{P_x^2}{2m_e}+\frac{1}{2}m_e\omega^2\left(\frac{\hbar k_y}{eB}+x\right)^2+\frac{(\hbar k_z)^2}{2m_e}\end{aligned}$$

其中，$\omega=\dfrac{eB}{m_e}$为回旋角频率。令$X=\dfrac{\hbar k_y}{eB}+x$，

$$H=\frac{P_x^2}{2m_e}+\frac{1}{2}m_e\omega^2X^2+\frac{(\hbar k_z)^2}{2m_e}$$

将哈密顿量代入薛定谔方程，可知

$$\left[\frac{P_x^2}{2m_e}+\frac{1}{2}m_e\omega^2X^2\right]\phi(x)=E'\phi(x)$$

由于$[X,P_x]=[x,P_x]=i\hbar$，因此上式就是谐振子本征方程

$$E' = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$\phi(x) = H_n$$

其中，H_n是谐振子本征态，是个厄米多项式。这个谐振子以$x_0 = \frac{\hbar k_y}{eB}$为中心简谐运动。

最终，能量本征值为

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m_e}$$

本征态为

$$\psi(x,y,z) = e^{i\left(k_y y + k_z z\right)} H_n(x - x_0)$$

在 2D 电子气中，有$k_z = 0$，因此能量本征值和本征态为

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$\psi(x,y) = e^{ik_y y} H_n(x - x_0)$$

对于一个能级，由于量子数k_y的存在，是简并的。考虑周期性边界条件

$$\psi(x, y + L_y) = e^{ik_y\left(y + L_y\right)} H_n(x - x_0) = \psi(x,y)$$

因此，$k_y L_y = 2m\pi$，也就是$k_y = \frac{2m\pi}{L_y}$，因此振动中心$x_0^m = \frac{2\pi\hbar}{eBL_y} m$。

在L_x范围内的态数目为

$$\frac{L_x}{\Delta x_0} = \frac{eBL_xL_y}{2\pi\hbar} = \frac{BS}{\frac{h}{e}}$$

其中，$\phi_0 = \frac{h}{e}$为量子磁通，物理意义十分明显，态数目就是磁场产生的磁通BS能容纳多少量子磁通。

参考

[1] https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9C%97%E9%81%93%E9%87%8F%E5%AD%90%E5%8C%96